

MID TERM EXAMINATION
CLASS: XII
SUBJECT: MATHEMATICS

TIME : 3 HRS.

M.M.100

General Instructions:

1. All questions are compulsory.
2. Question 1-4 in section A carrying 1 mark each.
3. Question 5-12 in section B carrying 2 marks each.
4. Question 13-23 in section C carrying 4 marks each.
5. Question 24-29 in section D carrying 6 marks each.

सामान्य निर्देश

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
2. खंड-अ के प्रश्न 1-4 के लिए 1 अंक निर्धारित है।
3. खंड-ब के प्रश्न 5-12 के लिए 2 अंक निर्धारित है।
4. खंड-स के प्रश्न 13-23 के लिए 4 अंक निर्धारित है।
5. खंड-द के प्रश्न 24-29 के लिए 6 अंक निर्धारित है।

Section-A (खंड-'अ')

1. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined as $f(x) = \frac{2x-3}{5}$ be an invertible function.

What is f^{-1} .

फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-3}{5}$ व्युत्क्रमणीय है। f^{-1} ज्ञात कीजिए।

2. Write the value of the determinant $\begin{vmatrix} P & P+1 \\ P-1 & P \end{vmatrix}$

सारणिक $\begin{vmatrix} P & P+1 \\ P-1 & P \end{vmatrix}$ का मान लिखिये।

3. If $\begin{bmatrix} x.y & 4 \\ z+6 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & W \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$,

Write the value of $(x+y+z)$.

यदि $\begin{bmatrix} x.y & 4 \\ z+6 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & W \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$,

तो $(x+y+z)$ का मान लिखिये।

4. Evaluate $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

मान ज्ञात कीजिये $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Section-B (खंड-'ब')

5. Evaluate $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)} dx$.

$\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)} dx$ का मान लिखिये।

6. Differentiate $\sin^2 x$ w r t $e^{\cos x}$.

$e^{\cos x}$ के सापेक्ष $\sin^2 x$ का अवकलन कीजिए।

7. If $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ and $A^2 - KA + 2I = 0$, find the real number K.

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $A^2 - KA + 2I = 0$ हो तो K का मान ज्ञात कीजिए।

(K एक वास्तविक संख्या है)

8. If $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ and A^{-1} exist, then find the values of a .

यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ तथा A^{-1} का अस्तित्व है, तो a के मान ज्ञात कीजिए।

9. Solve for x , $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$, $x > 0$.

x के लिए हल करें $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$, $x > 0$.

10. Form the differential equation of the family of parabolas having vertex at origin and axis along positive y -axis.

उन सभी परवलय परिवार की अवकलन समीकरण बनाओ जिसका शीर्ष मूल बिन्दु तथा अक्ष घनात्मक y अक्ष के अनुदिश है।

11. Using differential evaluate $\sqrt[3]{.009}$.

अवकलन का प्रयोग करते हुए $\sqrt[3]{.009}$ का मान ज्ञात कीजिये।

12. Let R be the set of real numbers.

If $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ and $g : R \rightarrow R$, $g(x) = 2x + 1$

then find $f \circ g$ and $g \circ f$.

माना कि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

यदि $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ तथा $g : R \rightarrow R$, $g(x) = 2x + 1$.

$f \circ g$ तथा $g \circ f$ के मान ज्ञात कीजिये।

Section-C (खंड-'स')

13. Discuss the continuity of

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x - 1} & \text{If } x \neq 0 \\ \frac{1}{e^x + 1} & \\ 1 & \text{If } x = 0 \end{cases} \quad \text{at } x = 0.$$

$$\text{फलन } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x - 1} & \text{If } x \neq 0 \\ \frac{1}{e^x + 1} & \\ 1 & \text{If } x = 0 \end{cases}$$

की सांतयता का $x = 0$ पर विचार कीजिए।

14. If $y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} = 1$,

Prove that $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$,

यदि $y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} = 1$,

सिद्ध करो कि $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$.

15. If $y = x + \tan x$,

Prove that $\cos^2 x \frac{d^2y}{dx^2} - 2y + 2x = 0$.

यदि $y = x + \tan x$,

सिद्ध करो कि $\cos^2 x \frac{d^2y}{dx^2} - 2y + 2x = 0$.

OR अथवा

$$\text{If } y = (\sin^{-1} x)^2,$$

$$\text{Prove that } (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

$$\text{यदि } y = (\sin^{-1} x)^2,$$

$$\text{सिद्ध करो कि } (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

16. Using properties of determinants, prove the following:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (xyz)(x-y)(y-z)(z-x)$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्नलिखित सिद्ध कीजिये:-

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (xyz)(x-y)(y-z)(z-x)$$

17. Solve the following equations -

$$\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$$

निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिये

$$\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = y^2$$

$$y^2(y) = k$$

$$y^3 = k$$

$$y = k^{1/3}$$

$$x = (k^{1/3})^2$$

$$x = k^{2/3}$$

18. Evaluate $\int \frac{(x-3)e^x}{(x-1)^3} dx$.

मान ज्ञात कीजिये $\int \frac{(x-3)e^x}{(x-1)^3} dx$.

$$(k^{2/3}, k^{1/3})$$

$$x = y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

$$= \frac{-1}{k^{2/3}}$$

19. Prove that the curves $x = y^2$ and $xy = k$ cut at right angle

if $8k^2 = 1$:

$$2k^2 = 1$$

$$k^2 = \frac{1}{2}$$

$$k^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow 8k^2 = 1$$

सिद्ध करो कि वक्र $x = y^2$ तथा $xy = k$ समकोण पर काटते हैं

यदि $8k^2 = 1$.

$$x = y^2 \quad xy = k$$

$$x = x\sqrt{x} = k \quad \frac{1}{2} + 1$$

$$x^{3/2} = k \quad \frac{3}{2}$$

$$y(x^{3/2})^k = 1$$

$$y \cdot x^{3k/2} = 1$$

$$x^{3/2} = \frac{1}{y}$$

$$y \cdot x^{3/2} = 1$$

$$\frac{1}{2} = y^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$xy = k$$

$$x = \frac{k}{y}$$

$$y = 2k$$

$$\frac{1}{2} = \frac{k}{y}$$

$$x = y^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sqrt{x} = 20$$

$$x = 0$$

20. Find intervals in which the function $f(x) = \sin x + \cos x$ ($0, 2\pi$) is

(a) Strictly increasing

(b) strictly decreasing

वह अन्तराल ज्ञात कीजिये जिसमें फलन $f(x) = \sin x + \cos x$ ($0, 2\pi$)

(a) निरन्तर वर्धमान हैं।

(b) निरन्तर ह्यसमान हैं।

21. Evaluate

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \log \sin x - \log \sin 2x) dx.$$

मान ज्ञात कीजिये -

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \log \sin x - \log \sin 2x) dx.$$

OR अथवा

Evaluate

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{4 + 3 \sin x}{4 + 3 \cos x} \right) dx.$$

मान ज्ञात कीजिये -

$$\int_0^{\pi/2} \log \left(\frac{4 + 3\sin x}{4 + 3\cos x} \right) dx.$$

22. Solve the following differential equation

$$y \log y dx - x dy = 0.$$

निम्न अवकलन समीकरण को हल कीजिये -

$$y \log y dx - x dy = 0.$$

23. Solve the following differential equation

$$(1 + x^2) dy + 2xy dx = \cot x \quad (x \neq 0)$$

निम्न अवकलन समीकरण को हल कीजिये -

$$(1 + x^2) dy + 2xy dx = \cot x \quad (x \neq 0)$$

OR अथवा

Solve the following differential equation;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

निम्न अवकलन समीकरण को हल करो :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

Section-D (खंड-'द')

24. Find the area of the region bounded by the curve $x^2 = 4y$ and the straight line $x = 4y - 2$. (Using Intergration)

वक्र $x^2 = 4y$ तथा सरल रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।
(समाकलन का प्रयोग करके)

25. Show that the height of a right circular cylinder of maximum volume that can be inscribed in a given cone of height h , is $h/3$.

सिद्ध कीजिए कि ऊँचाई h के लंब वृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई, शंकु की ऊँचाई की एक तिहाई है।



OR अथवा

If the sum of lengths of the hypotenuse and a side of a right angled triangle is given, show that the area of a triangle is maximum, when the angle between them is $\frac{\pi}{3}$.

यदि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण तथा एक भुजा का योग दिया है, तो दर्शाइये कि त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होगा जब उनके बीच का कोण $\frac{\pi}{3}$ है।

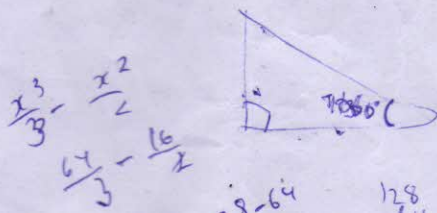
26. Find $\int_0^4 (x^2 - x) dx$ as the limit of a sum.

योगफल की सीमा के रूप में $\int_0^4 (x^2 - x) dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

OR अथवा

Using properties of definite integrals, evaluate the following:-

$$\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}) dx$$



निश्चित समाकलों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्न का मान ज्ञात कीजिये-

$$\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}) dx$$

27. Let $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ and R be the relation in $A \times A$ defined by $(a,b) R (c,d)$ if $a+d=b+c$ for $(a,b), (c,d)$ is $A \times A$. Prove that R is an equivalence relation. Also obtain the equivalence class $[(2,5)]$.

माना $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ तथा $A \times A$ में R एक सम्बन्ध है जो $A \times A$ में $(a,b), (c,d)$ के लिये $(a,b) R (c,d)$ यदि $a+d=b+c$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिये कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है। तुल्यता वर्ग $[(2,5)]$ भी ज्ञात कीजिये।

28. Show that the area of a triangle formed by the tangent and the normal at the point (a, a) on the curve $y^2(2a-x) = x^3$ and the line $x=2a$ is.

$$\frac{5a^2}{4} \text{ sq. unit.}$$

दिखाइये कि वक्र $y^2(2a-x) = x^3$ के एक बिन्दु (a, a) पर बनी स्पर्श रेखा,

अभिलम्ब तथा रेखा $x=2a$ से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{5a^2}{4}$ वर्ग एकक होगा।

OR अथवा

Find the equation of tangent to the curve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ at the point (x_1, y_1) and show that the sum of its intercepts on axes is constant.

बिन्दु (x_1, y_1) पर वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ की स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिये तथा दिखाइये कि अक्षों पर अंतः खण्डों का योग स्थिर है।

29. Two school P and Q want to award their selected students on the value of discipline politeness and punctuality. The school P wants to award ₹x, ₹y and ₹z each for three respective values to its 3, 2 and 1 students with a total award money of ₹1000. School Q wants to spend ₹1500 to award its 4, 1 and 3 students as the respective values. (By giving the same award money for the three values as before). If the total amount of awards for one prize on each value is ₹600. Using matrices find the award money for each value.

A part from the above three values, suggest one more value for awards.

दो विद्यालय P तथा Q अपने चुने हुये विद्यार्थियों को अनुशासन, शिष्टता तथा समय का पाबंद होने के मूल्यों पर पुरस्कार देना चाहते हैं। विद्यालय P अपने क्रमशः 3, 2 तथा

1 विद्यार्थियों को इन तीन मूल्यों के लिये ₹ x , ₹ y तथा ₹ z देना चाहता है जब कि इन पुरस्कारों का कुल मूल्य ₹1000 है। विद्यालय Q अपने क्रमशः 4, 1 और 3 विद्यार्थियों को इन मूल्यों के लिये कुल ₹1500 पुरस्कार स्वरूप देना चाहता है (तथा पहले विद्यालय जैसे ही तीन मूल्यों पर वही पुरस्कार राशि देना चाहता है) यदि इन तीनों मूल्यों पर दिये गये एक-एक पुरस्कार की कुल राशि ₹600 है तो आव्यूह का प्रयोग करके प्रत्येक मूल्य के लिये दी गयी पुरस्कार राशि ज्ञात कीजिये।

उपरोक्त तीन मूल्यों के अतिरिक्त एक अन्य मूल्य सुझाइये जो पुरस्कार देने के लिये शामिल करना चाहिये।

$$[x \ y \ z] =$$